两角和与差的正弦、余弦和正切公式

参考答案与试题解析

一．选择题（共 10 小题，满分 50 分，每小题 5 分）

1．原式$=\dfrac{\tan45°-\tan15°}{1+\tan45°\tan15°}=\tan\left(45°-15°\right)=\tan30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

故选：B

2．$Q\,tan\ \alpha=\ tan(\alpha+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{7}$，

$\therefore\tan2\alpha=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{7}}{1-\dfrac{3}{49}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{23}$，

即选项 ABC 错误，选项 D 正确，

故选：D.

3．　$Q\,\alpha$ 为锐角，且 $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$，$\therefore\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{5}{13}$．

$\because\ \beta$ 为第三象限角，且 $\sin\beta=-\dfrac{3}{5}$，

$\therefore\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\dfrac{4}{5}$，

$\therefore\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{12}{13}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{5}{13}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)$

$=-\dfrac{63}{65}$．故选 A.

4．$\because\cos B=-\dfrac{5}{13}<0$，$\therefore B$ 为钝角，从而 A 为锐角，

$\therefore\cos A=\sqrt{1-(\dfrac{3}{5})^2}=\dfrac{4}{5}$，$\sin B=\sqrt{1-(-\dfrac{5}{13})^2}=\dfrac{12}{13}$，

$\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$=-\frac{4}{5}\times(-\frac{5}{13})+\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{56}{65}$.

故选：C.

5. 方法一：由题意，得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$，所以

$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$.

故选：B.

方法二： 由题意得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=0$.

故选：B.

6. 将 $\sin\alpha-\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$ 两式平方相加，

得 $2-2\sin\alpha\cos\beta+2\cos\alpha\sin\beta=1$，

即 $2-2\sin(\alpha-\beta)=1$

可得 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$.

故选：C.

7. 因为 $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{3}$，

所以 $\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{3}$

即 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=-\frac{1}{3}$

而所求的 $\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos x+\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{3}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)$

$=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

故选：C.

8． 因为$\alpha+\frac{\pi}{4}=(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$，所以

$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{3}{22}$，

故选:C

9．$\because\begin{cases}0<\alpha<\frac{\pi}{2}\\-\frac{\pi}{2}<\beta<0\end{cases}$，$\therefore 0<\alpha-\beta<\pi$. 又$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，

$\therefore\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\frac{4}{5}$. $\because -\frac{\pi}{2}<\beta<0$，$\sin\beta=-\frac{5}{13}$，$\therefore\cos\beta=\frac{12}{13}$，

$\therefore\cos\alpha=\cos[(\alpha-\beta)+\beta]=\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta=\frac{56}{65}$.

故选：B

10． $\because A$，B 均为钝角且$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos B=-\sqrt{1-\sin^2 B}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

$-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$①，又$\frac{\pi}{2}<A<\pi$，$\frac{\pi}{2}<B<\pi$，$\therefore\pi<A+B<2\pi$②，由①②，知

$A+B=\frac{7\pi}{4}$.

故选：B

二．填空题（共 7 小题，单空每小题 4 分，两空每小题 6 分，共 36 分）

11． $\because \tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1}{7}$，∴

$\tan\alpha=\tan[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\frac{\pi}{4}]=\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\frac{1}{7}-1}{1+\frac{1}{7}\times1}=-\frac{3}{4}$，又 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，∴

$\cos\alpha=-\dfrac{4}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=-\frac{4}{5}$，故答案为：$-\frac{3}{4}$；$-\frac{4}{5}$．

12． ∵角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称，

∴ $\alpha+\beta=(2k+1)\pi,k\in Z$，

∴ $\sin\beta=\sin[(2k+1)\pi-\alpha]=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{1}{3}$，

又 $|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}=|\cos\beta|$，且 $\cos\alpha=-\cos\beta$，

∴ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{7}{9}$．

答案：(1)．$\frac{1}{3}$　　(2)．$-\frac{7}{9}$

13． 因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，且 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5},\cos\alpha=\frac{3}{5}$，

由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，则 $0<\beta-\alpha<\pi$，

又因为 $\cos(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{10}$，则 $\sin(\beta-\alpha)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，

所以 $\cos\beta=\cos[(\beta-\alpha)+\alpha]=\cos(\beta-\alpha)\cos\alpha-\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha$

$=\frac{\sqrt{2}}{10}\times\frac{3}{5}-\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{4}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$．

14. 因为$\beta-\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\left(\beta-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，所以

$\sin(\beta-\alpha)=\sqrt{1-\cos^2(\beta-\alpha)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

同理可得$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

所以$\sin\beta=\sin(\beta-\alpha+\alpha)=\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha+\cos(\beta-\alpha)\sin\alpha=\frac{8\sqrt{2}+3}{15}$.

15. 由三角函数的定义可知：点P_2的坐标为$(\cos(\alpha+\frac{\pi}{3}),\sin(\alpha+\frac{\pi}{3}))$，因为

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{3}<\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}$，所以点$P_2$在第二象限，已知点$P_2$的横坐标为$-\frac{4}{5}$，

即

$\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=-\frac{4}{5}$，所以$\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})}=\frac{3}{5}$，因此有

$\cos\alpha=\cos[(\alpha+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{3}]=\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}+\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$

.

16. 由$\tan\alpha=\sqrt{3}\left(1+m\right)$得$\sqrt{3}m=\tan\alpha-\sqrt{3}$，所以

$\sqrt{3}\left(\tan\alpha\tan\beta+m\right)+\tan\beta=\sqrt{3}\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha-\sqrt{3}+\tan\beta=0$，

$\therefore\tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\sqrt{3}$，由于$\alpha$、$\beta$均为锐角，所以$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{\pi}{3}$.

17. 因为$5\cos\alpha\cos\beta-5\sin\alpha\sin\beta=3(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$，

所以$2\cos\alpha\cos\beta=8\sin\alpha\sin\beta\Rightarrow\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{4}$，

因为α,β均为锐角，所以$\tan\alpha>0,\tan\beta>0$.

因为 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{4}{3}(\tan\alpha+\tan\beta)\geq\dfrac{4}{3}\cdot2\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{4}{3}$,

等号成立当且仅当 $\tan\alpha=\tan\beta=\dfrac{1}{2}$,

所以 $\tan(\alpha+\beta)$ 的最小值是 $\dfrac{4}{3}$.

故答案为：$\dfrac{4}{3}$.

三．解答题（共 5 小题，满分 64 分，18--20 每小题 12 分，21,22 每小题 14 分）

18． （1）由 $|AB|=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，得 $\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$,

$\therefore 2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{2}{5}$,

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\dfrac{4}{5}$.

（2）$\because \cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{4}{5}$，$\alpha$，$\beta$ 为锐角，

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=\pm\dfrac{3}{5}$.

当 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}$ 时，

$\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{24}{25}$.

当 $\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{3}{5}$ 时，

$\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=0$.

$\because \beta$ 为锐角，$\therefore \cos\beta=\dfrac{24}{25}$.

19． 因为 $\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$

所以$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$，

又$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2+2\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{3}$，

得$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{3}$.

（2）$\because \frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$，

$\therefore \cos\beta=-\frac{3}{5}$，

$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\pi<-\beta<-\frac{\pi}{2}$，

$\therefore -\pi<\alpha-\beta<0$，

又$\because \cos(\alpha-\beta)<0$，故$-\pi<\alpha-\beta<-\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore \sin\alpha=\sin[(\alpha-\beta)+\beta]=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$

$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{6\sqrt{2}-4}{15}$.

20.　（1）由$\sin(\alpha+2\beta)=\frac{7}{5}\sin\alpha$，得$\sin[(\alpha+\beta)+\beta]=\frac{7}{5}\sin[(\alpha+\beta)-\beta]$，

整理，得$6\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta$.

又α，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\tan(\alpha+\beta)=6\tan\beta$.

（2）由（1），知$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=6\tan\beta$，又$\tan\alpha=3\tan\beta$，

所以$\frac{\frac{4}{3}\tan\alpha}{1-\frac{1}{3}\tan^2\alpha}=2\tan\alpha$.

又 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\tan\alpha = 1$，所以 $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

21. （1）因为 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x + \frac{1}{2}\cos\omega x$，

所以 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$.

因为函数 $f(x)$ 的图象的两条相邻对称轴之间的距离为 π，

所以 $T = 2\pi$， $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$，所以 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

（2）由（1），得 $f\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\alpha = \frac{12}{13}$，

$f\left(\beta + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin(\beta + \pi) = -\sin\beta = -\frac{3}{5}$，所以 $\sin\beta = \frac{3}{5}$.

因为 α， $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{5}{13}$， $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \frac{4}{5}$，

所以 $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} - \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} = -\frac{16}{65}$.

22. （1）函数 $f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{x}{2} + 3 = 3\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + 3$， $x \in \mathbf{R}$，

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi$， $k \in Z$，

得 $-\frac{4\pi}{3} + 4k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$， $k \in Z$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{4\pi}{3} + 4k\pi, \frac{2\pi}{3} + 4k\pi\right]$， $k \in Z$.

（2）因为 $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6} \le \frac{x}{2} \le \frac{2\pi}{3}$，

所以$\frac{\pi}{3} \le \frac{x}{2}+\frac{\pi}{6} \le \frac{5\pi}{6}$，

所以当$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，即$x=\frac{4\pi}{3}$时，$f\left(x\right)$取得最小值，为$\frac{9}{2}$；

当$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{2\pi}{3}$时，$f\left(x\right)$取得最大值，为6.