第三章　单元质量测评

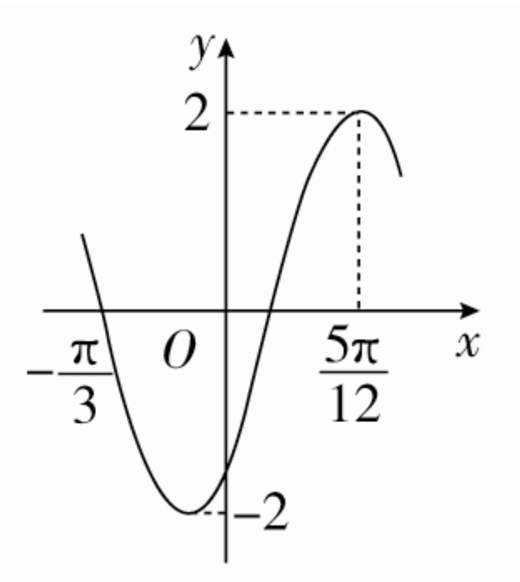
一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1.$\frac{2\sin^2\alpha}{\sin2\alpha}\cdot\frac{2\cos^2\alpha}{\cos2\alpha}$等于(　　)

A．$\tan\alpha$　B．$\tan2\alpha$　C．1　D.$\frac{1}{2}$

答案　B

解析　原式$=\frac{(2\sin\alpha\cos\alpha)^2}{\sin2\alpha\cos2\alpha}=\frac{\sin^22\alpha}{\sin2\alpha\cos2\alpha}=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\tan2\alpha$.故选 B.



2．函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos\varphi+2\cos\omega x\sin\varphi\left(\omega>0，-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则 φ 的值是(　　)

A．$-\frac{\pi}{3}$　　　　B．$-\frac{\pi}{6}$

C.$\frac{\pi}{6}$　　　　D.$\frac{\pi}{3}$

答案　A

解析　$f(x)=2\sin\omega x\cos\varphi+2\cos\omega x\sin\varphi=2\sin(\omega x+\varphi)$．由图象，得$\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)$，$T=\pi$，所以 $\omega=2$.因为图象过点$\left(\frac{5\pi}{12}，2\right)$，且$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，故选 A.

3．设 $a=\frac{1}{2}\cos6°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin6°$，$b=\frac{2\tan13°}{1-\tan^2 13°}$，$c=\sqrt{\frac{1-\cos50°}{2}}$，则有(　　)

A．$c<b<a$　B．$a<b<c$

C．$a<c<b$　D．$b<c<a$

答案　C

解析　$\because a=\sin30°\cos6°-\cos30°\sin6°=\sin(30°-6°)=\sin24°$，$b=\tan(2\times13°)=\tan26°$，$c=\sin\frac{50°}{2}=\sin25°$，$\therefore a<c<b$.

4．$4\cos50°-\tan40°=$(　　)

A.$\sqrt{2}$　B.$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

C.$\sqrt{3}$　D．$2\sqrt{2}-1$

答案　C

解析　$4\cos50°-\tan40°=4\cos50°-\frac{\sin40°}{\cos40°}$

$=\frac{4\sin40°\cdot\cos40°}{\cos40°}-\frac{\sin40°}{\cos40°}=\frac{2\sin80°-\sin40°}{\cos40°}$

$=\frac{2\cos10°-\sin40°}{\cos40°}=\frac{2\cos10°-\sin(30°+10°)}{\cos40°}$

$=\frac{\frac{3}{2}\cos10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10°}{\cos40°}$

$=\frac{\sqrt{3}(\cos30°\cos10°-\sin30°\sin10°)}{\cos40°}=\frac{\sqrt{3}\cos40°}{\cos40°}=\sqrt{3}$.

5．函数 $y=\cos^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-1$ 是(　　)

A．周期是 2π 的奇函数　　B．周期是 π 的偶函数

C．周期是 π 的奇函数　　D．周期是 2π 的偶函数

答案　C

解析　$y=\cos^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-1$

$=\dfrac{1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{2}+\dfrac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}-1$

$=\dfrac{\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}$

$=\dfrac{\cos2x\cos\frac{\pi}{6}+\sin2x\sin\frac{\pi}{6}-\cos2x\cos\frac{\pi}{6}+\sin2x\sin\frac{\pi}{6}}{2}$

$=\dfrac{\sin2x}{2}$.

$\therefore T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，且 $\sin(-2x)=-\sin2x$.故选 C.

6．已知 $f(x)=\sin\omega x+\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上相邻两条对称轴间的距离是$\frac{2\pi}{3}$，则 ω 的一个值是(　　)

A.$\frac{2}{3}$　B.$\frac{4}{3}$　C.$\frac{3}{2}$　D.$\frac{3}{4}$

答案　C

解析　$f(x)=\sin\omega x+\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x-\frac{1}{2}\sin\omega x=\frac{1}{2}\sin\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$.

由题意可知，$f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{3}\times2=\frac{4\pi}{3}$，所以$\frac{4\pi}{3}=\frac{2\pi}{|\omega|}$，所以$|\omega|=\frac{3}{2}$，故选 C.

7．在△ABC 中，若 $\cos A\cos B=-\cos^2\frac{C}{2}+1$，则△$ABC$ 一定是(　　)

A．等腰直角三角形　　B．直角三角形

C．等腰三角形　　D．等边三角形

答案　C

解析　由已知得 $2\cos A\cos B=-2\cos^2\frac{C}{2}+2=-\cos C+1=\cos(A+B)+1=\cos A\cos B-\sin A\sin B+1$，$\therefore\cos A\cos B+\sin A\sin B=\cos(A-B)=1$，又 $-\pi<A-B<\pi$，$\therefore A-B=0$，即 $A=B$，故选 C.

8．设函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$的最小正周期为 π，将 $y=f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度得函数 $y=g(x)$的图象，则(　　)

A．$g(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减

B．$g(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)$上单调递减

C．$g(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

D．$g(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)$上单调递增

答案　A

解析　$f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$.

$\because\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore\omega=2$，

$\therefore f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

∵将 $y=f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度得函数 $y=g(x)$的图象，

$\therefore g(x)=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos2x$.

令 $2k\pi\leqslant2x\leqslant2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=0$ 时，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，即 $g(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减．

9．设向量 $\boldsymbol{a}=(1,\cos\theta)$与 $\boldsymbol{b}=(-1,2\cos\theta)$垂直，则 $\cos2\theta$ 等于(　　)

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　B.$\frac{1}{2}$　C．0　D．-1

答案　C

解析　$\boldsymbol{a}=(1,\cos\theta)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2\cos\theta)$．

$\because\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1+2\cos^2\theta=0$，

$\therefore\cos^2\theta=\frac{1}{2}$，$\therefore\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=1-1=0.$

10．设函数 $f(x)=2\cos^2x+\sqrt{3}\sin2x+a$（$a$ 为实常数）在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值为$-4$，则 a 的值等于(　　)

A．4　B．-6　C．-4　D．-3

答案　C

解析　$f(x)=2\cos^2x+\sqrt{3}\sin2x+a=1+\cos2x+\sqrt{3}\sin2x+a=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+a+1$.当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，$\therefore f(x)_{\min}=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+a+1=-4$.$\therefore a=-4$.故选 C.

11．已知$\frac{1-\cos x+\sin x}{1+\cos x+\sin x}=-2$，则 $\sin x$ 的值为(　　)

A.$\frac{4}{5}$　B．$-\frac{4}{5}$　C．$-\frac{3}{5}$　D．$-\frac{\sqrt{15}}{5}$

答案　B

解析　原式$=\frac{(1-\cos x)+\sin x}{(1+\cos x)+\sin x}=$

$$\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}=-2,$$

$$\therefore\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2\times(-2)}{1+4}=-\frac{4}{5}$$，故选 B.

12．已知方程 $x^2+4ax+3a+1=0(a>1)$的两根均为 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，且 α，$\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$的值是(　　)

A.$\frac{1}{2}$　B．-2　C.$\frac{4}{3}$　D.$\frac{1}{2}$或-2

答案　B

解析　由题意知：$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=-4a,\\ \tan\alpha\cdot\tan\beta=3a+1,\end{cases}$

$\therefore\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-4a}{1-3a-1}=\dfrac{4}{3}$，

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{4}{3}$，

$\therefore\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{2}$或 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-2$.

由 $a>1$，可得

$\tan\alpha+\tan\beta=-4a<0$，

$\tan\alpha\cdot\tan\beta=3a+1>0$，

$\therefore\tan\alpha<0$，$\tan\beta<0$，

结合 α，$\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore\alpha$，$\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，

$\therefore\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}<0$，故 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-2$，故选 B.

二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在题中的横线上)

13．已知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，向量 $\boldsymbol{a}=(\sin2\theta,\cos\theta)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\theta,1)$，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\tan\theta=$________.

答案　$\dfrac{1}{2}$

解析　因为向量 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以 $\sin2\theta-\cos\theta\cdot\cos\theta=0$，又 $\cos\theta\neq0$，所以 $2\sin\theta=\cos\theta$，故 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$.

14．设 α 为锐角，若 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=$________.

答案　$-\frac{\sqrt{2}}{10}$

解析　因为 α 为锐角，所以 $\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{3}{5}$，则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

15．已知 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=$________.

答案　$\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

解析　$\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

$=\sin\left[\pi-\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)\right]+\cos^2\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]$

$=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}+1-\frac{1}{3}=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$.

16．关于函数 $f(x)=\cos 2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$，下列命题：

①存在 x_1、x_2，当 $x_1-x_2=\pi$ 时，$f(x_1)=f(x_2)$成立；

②$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上是单调递增；

③函数 $f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$成中心对称图形；

④将函数 $f(x)$的图象向左平移$\frac{5\pi}{12}$个单位长度后将与 $y=2\sin 2x$ 的图象重合．其中正确命题的序号是________(注：把你认为正确命题的序号都填上)．

答案　①③

解析　$\because f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)\right]$，∴周期 $T=\pi$，故①正确；$\because\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{5\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}$，解之得 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，是其递减区间，故②错误；∵对称中心的横坐

标满足 $2x+\frac{5\pi}{6}=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}$，当 $k=1$ 时，$x=\frac{\pi}{12}$，故③正确；④中应该是向右平移，故④不正确．

三、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17．(本小题满分 10 分)已知函数 $f(x)=\sin 2x\cos\varphi+\cos 2x\sin\varphi(x\in \mathbf{R},0<\varphi<\pi)$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求 $f(x)$的解析式；

(2)若 $f\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，　求 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

的值．

解　(1)由 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $\sin\frac{\pi}{2}\cos\varphi+\cos\frac{\pi}{2}\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

所以 $f(x)=\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)由 $f\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{13}$，可得 $\sin\left[2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\frac{5}{13}$，即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{13}$，所以 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$.

又 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$，

所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{5}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

18．(本小题满分 12 分)求证：$\tan^2x+\frac{1}{\tan^2x}=\frac{2(3+\cos 4x)}{1-\cos 4x}$.

证明　证法一：左边 $=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=\frac{\sin^4x+\cos^4x}{\sin^2x\cos^2x}$

$=\frac{(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x}{\frac{1}{4}\sin^22x}=\frac{1-\frac{1}{2}\sin^22x}{\frac{1}{4}\sin^22x}$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}{\frac{1}{8}(1-\cos 4x)}=\frac{8-4\sin^2 2x}{1-\cos 4x}=\frac{4+4\cos^2 2x}{1-\cos 4x}$$

$$=\frac{4+2(1+\cos 4x)}{1-\cos 4x}=\frac{2(3+\cos 4x)}{1-\cos 4x}=\text{右边}.$$

∴原式得证．

证法二：右边 $=\frac{2(2+1+\cos 4x)}{2\sin^2 2x}=\frac{2(2+2\cos^2 2x)}{8\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{2(1+\cos^2 2x)}{4\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2+(\cos^2 x-\sin^2 x)^2}{2\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{2(\sin^4 x+\cos^4 x)}{2\sin^2 x\cos^2 x}=\tan^2 x+\frac{1}{\tan^2 x}=$ 左边．

∴原式得证．

19．(本小题满分 12 分)在平面直角坐标系 xOy 中，设向量 $\boldsymbol{a}=(2\sin\theta, 1)$，$\boldsymbol{b}=\left(1, \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)$，$\theta\in\mathbf{R}$.

(1)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，求 $\tan\theta$ 的值；

(2)若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，且 $\theta\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，求 θ 的值.

解　(1)由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，得 $2\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=0$，

即 $2\sin\theta+\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}=0$，

整理得 $\frac{5}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=0$，所以 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{5}$.

(2)由 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，得 $2\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，

即 $2\sin^2\theta\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\theta\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}=1$，

所以 $\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta=1$，

整理得 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta=\frac{1}{2}$，

所以 $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

又 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $2\theta-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以 $2\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

20．(本小题满分 12 分)函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x+\sin^2\omega x+k$，$\omega>0$.

(1)若 $f(x)$图象中相邻两条对称轴间的距离不小于$\frac{\pi}{2}$，求 ω 的取值范围；

(2)若 $f(x)$的最小正周期为 π，且当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$时，$f(x)$的最大值是$\frac{1}{2}$，求 $f(x)$最小值，并说明如何由 $y=\sin2x$ 的图象变换得到 $y=f(x)$的图象.

解　$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\omega x+\frac{1-\cos2\omega x}{2}+k=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\omega x-\frac{1}{2}\cos2\omega x+\frac{1}{2}+k=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+k+\frac{1}{2}$.

(1)由题意可知$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2\omega}\geqslant\frac{\pi}{2}$，$\therefore\omega\leqslant1$.又 $\omega>0$，

$\therefore0<\omega\leqslant1$.

(2)$\because T=\frac{\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore\omega=1$.

$\therefore f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+k+\frac{1}{2}$.

$\because x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$.

从而当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$时，$f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+k+\frac{1}{2}=k+1=\frac{1}{2}$，

$\therefore k=-\frac{1}{2}$，故 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore$当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{\pi}{6}$时 $f(x)$取最小值 -1.

把 $y=\sin2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位得到 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象．

21．(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$.

(1)求函数 $f(x)$的单调减区间；

(2)求函数 $f(x)$的最大值并求 $f(x)$取得最大值时的 x 的取值集合；

(3)若 $f(x)=\frac{6}{5}$，求 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的值．

解　$f(x)=2\cos x\cos\frac{\pi}{3}+2\sin x\sin\frac{\pi}{3}-2\cos x$

$=\cos x+\sqrt{3}\sin x-2\cos x$

$=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3}{2}\pi(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore 2k\pi+\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore$单调递减区间为$\left[2k\pi+\frac{2\pi}{3}，2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$．

(2)$f(x)$取最大值 2 时，$x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$．

$\therefore f(x)$的最大值是 2，取得最大值时的 x 的取值集合是$\left\{x|x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}，k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(3)$f(x)=\frac{6}{5}$即 $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{6}{5}$，

$\therefore\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$.

$\therefore\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1-2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$.

22．(本小题满分 12 分)在△ABC 中，a、b、c 分别是角 A、B、C 所对的边，且 $2\sin^2\frac{A+B}{2}+\cos 2C=1$.

(1)求角 C 的大小；

(2)若 $\sin^2A-\sin^2B=\frac{1}{2}\sin^2C$，试求 $\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)$的值．

解　(1)由 $2\sin^2\frac{A+B}{2}+\cos 2C=1$，得

$1-\cos(A+B)+2\cos^2C-1=1$.

又由 $A+B+C=\pi$，将上式整理，得

$2\cos^2C+\cos C-1=0$，

即$(2\cos C-1)(\cos C+1)=0$.

$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$或 $\cos C=-1$(舍去)．

由 $0<C<\pi$，得 $C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由 $\sin^2A-\sin^2B=\frac{1}{2}\sin^2C$，

得 $2\sin^2A-2\sin^2B=\sin^2C$，即

$1-\cos2A-1+\cos2B=\frac{3}{4}$，$\cos2B-\cos2A=\frac{3}{4}$，

$\because A+B=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore B=\frac{2\pi}{3}-A$.

$\therefore \cos\left(\frac{4\pi}{3}-2A\right)-\cos2A=\frac{3}{4}$，

$\therefore -\frac{3}{2}\cos2A-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2A=\frac{3}{4}$.

得$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2A+\frac{1}{2}\sin2A=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore \sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.